第27卷 第1期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 1
2010年02月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Feb. 2010

文章编号:1005-3085(2010)01-0099-06

广义 Vandermonde 方程组的有效快速算法*

赵良东， 徐 仲， 陆 全
(西北工业大学应用数学系，西安 710072)

摘 要: 基于求解Vandermonde方程组的Bjorck-Pereyra算法，本文给出了求解广义Vandermonde方程组的有效快速算法，所需的计算量为$O(n^2)$。数值算例表明，与求解Vandermonde方程组的Gohberg-Kailath-Koltracht算法和Gauss消元法相比，本文的算法具有更高的计算精度。

关键词: Vandermonde矩阵；广义Vandermonde矩阵；线性方程组；快速算法
分类号: **AMS**(2000) 15A23; 65F30 **中图分类号**: O241.6 **文献标识码**: A

1 引言

定义 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是n个实数或复数，称如下的n阶方阵

$$V=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{pmatrix} \tag{1}$$

为广义Vandermonde矩阵。

许多实际的问题可以转化为广义Vandermonde矩阵的相关求解问题，如要构造次数不超过n的缺项多项式$g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-2}x^{n-2}+c_nx^n$在$n$个点$a_1,a_2,\cdots,a_n$处满足插值条件$g(a_k)=f_k\,(k=1,2,\cdots,n)$，这一问题转化为求解广义Vandermonde方程组$V^{\mathrm{T}}c=f$，其中$c=(c_0,\cdots,c_{n-2},c_n)^{\mathrm{T}}$，$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$。如果按照一般的方法，如Gauss消元法，求解广义Vandermonde方程组，所需运算量为$O(n^3)$。近年来，针对一些特殊矩阵出现了一批求解相应计算问题的快速算法，其运算量达到$O(n^2)$或更低[1-8]。对于由Vandermonde矩阵$A=(a_j^{i-1})_{i,j=1}^n$推广得到的所谓Vandermonde型矩阵(本文的广义Vandermonde矩阵是其特例)，文献[2]利用这类矩阵的位移结构给出了求解相应方程组的快速算法：Gohberg-Kailath-Koltracht算法，但由于Vandermonde(型)矩阵一般是严重病态的，用所给快速算法和Gauss消元法求解相应方程组的阶数很低。文献[1]利用Newton插值多项式构造了求解Vandermonde方程组的有效快速算法：Bjorck-Pereyra算法。本文通过将n阶广义Vandermonde矩阵升阶为$n+1$阶的Vandermonde矩阵，并利用分块处理技巧

收稿日期: 2008-06-26. **作者简介**: 赵良东(1984年7月生)，男，硕士. 研究方向：特殊矩阵的快速算法.
***基金项目**: 国家自然科学基金(10802068)；陕西省自然科学基金(2006A05).

和求解Vandermonde方程组的Bjorck-Pereyra算法，构造出了求解广义Vandermonde方程组的快速算法，所需的运算量为$O(n^2)$。数值算例表明，与Gauss消元法和Gohberg-Kailath-Koltracht算法相比，本文的算法具有更高的计算精度。

2 快速算法推导

考虑求解广义Vandermonde方程组

$$V^{\mathrm{T}}x=f,\quad Vy=g, \tag{2}$$

其中V是式(1)的广义Vandermonde矩阵，而

$$x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\quad y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}},\quad f=(f_1,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}},\quad g=(g_1,\cdots,g_n)^{\mathrm{T}}.$$

构造$n+1$阶Vandermonde矩阵

$$\widetilde{V}=\left(a_j^{i-1}\right)_{i,j=1}^{n+1}, \tag{3}$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$两两互异，且$a_{n+1}\neq 0$。设$P=(e_1,\cdots,e_{n-1},e_{n+1},e_n)$，其中$e_i$是第$i$个分量为1，其余分量为0的$n+1$维列向量。则有

$$P^{\mathrm{T}}\widetilde{V}=\begin{pmatrix} V & \alpha \\ \beta^{\mathrm{T}} & r \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中

$$\alpha=\left(1,a_{n+1},\cdots,a_{n+1}^{n-2},a_{n+1}^{n}\right)^{\mathrm{T}},\quad \beta^{\mathrm{T}}=\left(a_1^{n-1},a_2^{n-1},\cdots,a_{n-1}^{n-1},a_n^{n-1}\right),\quad r=a_{n+1}^{n-1}.$$

令

$$\widehat{V}=\begin{pmatrix} I_n & \alpha \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}\widetilde{V},$$

结合式(4)可得

$$\widehat{V}-\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}e_{n+1}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} V+\alpha\beta^{\mathrm{T}} & r\alpha \\ \beta^{\mathrm{T}} & r \end{pmatrix}.$$

上式两边求逆，并利用Sherman-Morrison公式和分块矩阵求逆公式得

$$\widehat{V}^{-1}+\frac{1}{1-e_{n+1}^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}}\widehat{V}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}e_{n+1}^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{-1}=\begin{pmatrix} V^{-1} & -V^{-1}\alpha \\ -\dfrac{1}{r}\beta^{\mathrm{T}}V^{-1} & \dfrac{1}{r}(1+\beta^{\mathrm{T}}V^{-1}\alpha) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

设

$$\widetilde{s}=(s_1,\cdots,s_{n+1})^{\mathrm{T}},\quad \widetilde{t}=(t_1,\cdots,t_{n+1})^{\mathrm{T}},\quad \widetilde{w}=(w_1,\cdots,w_{n+1})^{\mathrm{T}},\quad \widetilde{z}=(z_1,\cdots,z_{n+1})^{\mathrm{T}}$$

分别是Vandermonde方程组

$$\widetilde{V}^{\mathrm{T}}\widetilde{s}=\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},\quad \widetilde{V}^{\mathrm{T}}\widetilde{t}=e_{n+1},\quad \widetilde{V}\widetilde{w}=\widetilde{g},\quad \widetilde{V}\widetilde{z}=\widetilde{h} \tag{6}$$

的解向量，其中

$$\widetilde{g}=\left(g_1,\cdots,g_{n-1},0,g_n\right)^{\mathrm{T}},\quad \widetilde{h}=\left(1,a_{n+1},\cdots,a_{n+1}^{n-2},0,a_{n+1}^{n}\right)^{\mathrm{T}}.$$

式 (5) 两边右乘 $\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$ 以及式 (5) 取转置再右乘 $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$，可得以下两式

$$\widehat{V}^{-1}\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{1-e_{n+1}^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}}\widehat{V}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}e_{n+1}^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{-1}\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ -\frac{1}{r}\beta^{\mathrm{T}}y \end{pmatrix},\tag{7}$$

$$\widehat{V}^{-\mathrm{T}}\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{1-\begin{pmatrix}\alpha^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\widehat{V}^{-\mathrm{T}}e_{n+1}}\widehat{V}^{-\mathrm{T}}e_{n+1}\begin{pmatrix}\alpha^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\widehat{V}^{-\mathrm{T}}\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ -\alpha^{\mathrm{T}}x \end{pmatrix}.\tag{8}$$

注意到

$$\widehat{V}^{-1}\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}=\widetilde{w},\quad \widehat{V}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}=\widetilde{z},\quad \widehat{V}^{-\mathrm{T}}\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ s_n-\alpha^{\mathrm{T}}s \end{pmatrix},\quad V^{-\mathrm{T}}e_{n+1}=\begin{pmatrix} t \\ t_n-\alpha^{\mathrm{T}}t \end{pmatrix},$$

其中

$$s=\left(s_1,\cdots,s_{n-1},s_{n+1}\right)^{\mathrm{T}},\quad t=\left(t_1,\cdots,t_{n-1},t_{n+1}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$w=\left(w_1,w_2,\cdots,w_n\right)^{\mathrm{T}},\quad z=\left(z_1,z_2,\cdots,z_n\right)^{\mathrm{T}}.$$

则由式 (7) 和 (8) 可得广义 Vandermonde 方程组 (2) 的解为

$$x=s+\frac{\alpha^{\mathrm{T}}s}{1-\alpha^{\mathrm{T}}t}t,\quad y=w+\frac{w_{n+1}}{1-z_{n+1}}z.\tag{9}$$

式 (6) 的 Vandermonde 方程组可直接由 Bjorck-Pereyra 算法求解，综上可得如下的快速算法。

算法 1 求解广义 Vandermonde 方程组 $V^{\mathrm{T}}x=f$。

$$\alpha_i=a_{n+1}^{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n-1),\qquad \alpha_n=a_{n+1}^{n};$$

$$c_j^{(1)}=f_j,\quad p_j^{(1)}=0\ (j=1,2,\cdots,n),\qquad c_{n+1}^{(1)}=0,\ p_{n+1}^{(1)}=1.$$

对 $k=1,2,\cdots,n$，有

$$c_j^{(k+1)}=\frac{c_j^{(k)}-c_{j-1}^{(k)}}{a_j-a_{j-k}},\quad p_j^{(k+1)}=\frac{p_j^{(k)}-p_{j-1}^{(k)}}{a_j-a_{j-k}},\quad j=k+1,k+2,\cdots,n+1,$$

$$s_{n+1}^{(n+1)}=c_{n+1}^{(n+1)},\quad t_{n+1}^{(n+1)}=p_{n+1}^{(n+1)}.$$

对 $k=n,\cdots,2,1$，有

$$s_k^{(k)}=c_k^{(k)}-a_k s_{k+1}^{(k+1)},\quad s_j^{(k)}=s_j^{(k+1)}-a_k s_{j+1}^{(k+1)},\quad j=k+1,\cdots,n,$$

$$s_{n+1}^{(k)}=s_{n+1}^{(k+1)},\quad t_k^{(k)}=p_k^{(k)}-a_k t_{k+1}^{(k+1)},\quad t_j^{(k)}=t_j^{(k+1)}-a_k t_{j+1}^{(k+1)},\quad j=k+1,\cdots,n,$$

$$t_{n+1}^{(k)}=t_{n+1}^{(k+1)},\quad s_j=s_j^{(1)},\quad t_j=t_j^{(1)},\quad j=1,2,\cdots,n+1,$$

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i s_i+\alpha_n s_{n+1},\quad \mu=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i t_i+\alpha_n t_{n+1},\quad x_n=s_{n+1}+\sigma t_{n+1}/(1-\mu),$$

$$x_i=s_i+\sigma t_i/(1-\mu),\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

该算法需 $(5n^2/2)+(9n/2)+1$ 次乘除运算和 $3n^2+7n-2$ 次加减运算。

算法2 求解广义 Vandermonde 方程组 $Vy=g$。

$$d_j^{(1)}=g_j,\quad q_j^{(1)}=a_{n+1}^{j-1},\quad j=1,2,\cdots,n-1,$$

$$d_n^{(1)}=q_n^{(1)}=0,\quad d_{n+1}^{(1)}=g_n,\quad q_{n+1}^{(1)}=a_{n+1}^{n}.$$

对 $k=1,2,\cdots,n$，有

$$d_j^{(k+1)}=d_j^{(k)}-a_k d_{j-1}^{(k)},\quad q_j^{(k+1)}=q_j^{(k)}-a_k q_{j-1}^{(k)},\quad j=k+1,k+2,\cdots,n+1,$$

$$w_j^{(n+1)}=d_j^{(j)},\quad z_j^{(n+1)}=q_j^{(j)},\quad j=1,2,\cdots,n+1.$$

对 $k=n,\cdots,2,1$，有

$$u_i^{(k+1)}=w_i^{(k+1)},\quad v_i^{(k+1)}=z_i^{(k+1)},\quad i=1,2,\cdots,k,$$

$$u_j^{(k+1)}=w_j^{(k+1)}/(a_j-a_{j-k}),\quad v_j^{(k+1)}=z_j^{(k+1)}/(a_j-a_{j-k}),\quad j=k+1,k+2,\cdots,n+1,$$

$$w_i^{(k)}=u_i^{(k+1)},\quad z_i^{(k)}=v_i^{(k+1)},\quad i=1,2,\cdots,k-1,$$

$$w_j^{(k)}=u_j^{(k+1)}-u_{j+1}^{(k+1)},\quad z_j^{(k)}=v_j^{(k+1)}-v_{j+1}^{(k+1)},\quad j=k,k+1,\cdots,n,$$

$$w_{n+1}^{(k)}=u_{n+1}^{(k+1)},\quad z_{n+1}^{(k)}=v_{n+1}^{(k+1)},\quad w_j=w_j^{(1)},\quad z_j=z_j^{(1)},\quad j=1,2,\cdots,n+1,$$

$$y_i=w_i+w_{n+1}z_i/(1-z_{n+1}),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

该算法需 $(5n^2/2)+(5n/2)+1$ 次乘除运算和 $3n^2+5n$ 次加减运算。

3 数值算例

我们针对一些广义 Vandermonde 矩阵 V，在微机(CPU 奔 Ⅳ2.6G，内存 256MB)上编程计算，分别用本文所给的快速算法、Gauss 消元法和 Gohberg-Kailath-Koltracht 算法(简记为 GKK 算法)求解广义 Vandermonde 方程组 $V^{\mathrm{T}}x=f$ 和 $Vy=g$，部分算例如下。

例1 求解广义 Vandermonde 方程组 $V^{\mathrm{T}}x=f$，其中

$$a_i=-1+2(i-1)/n,\quad f_i=T_{n-1}(a_i)+2^{n-2}(a_i^n-a_i^{n-1}),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

这里 $T_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 阶 Chebyshev 多项式。为方便起见，取 n 为奇数。该方程组的精确解为 Chebyshev 多项式 $T_{n-1}(x)$ 的展开式系数，即

$$x_i^* = \frac{n-1}{2}\,\frac{(-1)^{\frac{n-i}{2}}(n-2-\frac{n-i}{2})!}{(\frac{n-i}{2})!(i-1)!}\,2^{i-1}\ \ (i\text{为奇数}),\quad x_i^*=0\ \ (i\text{为偶数})$$

取 $a_{n+1}=1$，误差用 $e=\|x^*-x\|_2$ 度量，计算结果见表1。

表1: 广义 Vandermonde 方程组 $V^{\mathrm{T}}x=f$ 算例结果比较

n	7	11	15	19	23	27
快速算法1	1.77e-13	8.13e-11	2.74e-08	3.24e-06	6.01e-04	9.30e-01
高斯消元法	3.86e-13	1.16e-09	3.22e-06	3.46e-03	6.88e+00	
GKK算法	5.84e-11	2.62e-06	4.12e-01	3.16e+07		

例2 求解广义 Vandermonde 方程组 $Vy=g$，其中

$$a_i=\frac{1}{i+2},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$g_i=\frac{1}{2^{i-1}},\quad i=1,2,\cdots,n-1,\qquad g_n=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}\mathrm{C}_n^j}{j+2}.$$

这里 $\mathrm{C}_n^j=n(n-1)\cdots(n-j+1)/j!$。该方程组的精确解为

$$y_j^*=(-1)^{j-1}\mathrm{C}_n^j\big(1+j/2\big)^{n-1},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

取 $a_{n+1}=\frac{1}{n+3}$，误差用

$$e=\max_{1\le j\le n}\frac{|y_j^*-y_j|}{|y_j^*|}$$

度量，计算结果见表2。

表2: 广义 Vandermonde 方程组 $Vy=g$ 算例结果比较

n	4	8	12	16	20
快速算法2	9.47e-15	8.27e-13	1.76e-10	7.91e-06	3.65e-01
高斯消元法	1.38e-14	1.25e-09	2.27e-05	1.03e+00	
GKK算法	5.92e-16	1.54e-05	1.00e+00		

数值算例表明，与 Gauss 消元法和 Gohberg-Kailath-Koltracht 算法相比，本文的算法具有更高的计算精度。由于广义 Vandermonde 矩阵是严重病态的，所以以上算例中矩阵的阶数不高。本文研究的广义 Vandermonde 方程组的快速算法很容易推广到矩阵为一般跳行的情形。

参考文献:

[1] Byorck A, Pereyra V. Solution of Vandermonde systems of equations[J]. Math Comp, 1970, 24: 893-903
[2] Gohberg I, Kailath T, Koltracht I. Efficient solution of linear systems of equations with recursive structure[J]. Linear Algebra Appl, 1986, 80: 81-113
[3] Higham N J. *Fast solution of Vandermonde-like systems involving orthogonal polynomials*[J]. IMA J Numer Anal, 1988, 8: 473-486
[4] 徐仲. Vandermonde矩阵类的快速算法[M]. 西安：西北工业大学出版社，1997
Xu Z. Fast Algorithm of Vandermonde-like Matrices[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1997
[5] 徐仲，游兆永. Vandermonde类矩阵之方程组的递进算法[J]. 数值计算与计算机应用，1997, 4: 13-22
Xu Z, You Z Y. Progressive algorithms for the solution of the Vandermonde-like systems[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 1997, 4: 13-22
[6] 徐仲，张凯院，陆全. Toeplitz矩阵类的快速算法[M]. 西安：西北工业大学出版社，1999
Xu Z, Zhang K Y, Lu Q. Fast Algorithm for Toeplitz-like Matrices[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical *University Press, 1999*
[7] 陆全，徐仲，叶正麟. Hankel矩阵和Vandermonde矩阵之逆的新矩阵表示式及快速算法[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版)，2005, 33(1): 11-14
Lu Q, Xu Z, Ye Z L. New expressions and fast algorithms for inverse of Hankel matrix and Vandermonde matrix[J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2005, 33(1): 11-14
[8] Lu X F, Xu Z, Lu Q, *et al.* A *fast algorithm of the inverse of Vandermonde-type matrix*[C]// Proceedings of the Seventh International Conference on Matrix Theory and its Applications, 2006, 17-19: 246-249

An Efficient and Fast Algorithm for Solving Generalized Vandermonde Systems

ZHAO Liang-dong, XU Zhong, LU Quan

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract: In this paper, an efficient and fast algorithm for solving generalized Vandermonde systems is obtained on basis of the Bjorck-Pereyra algorithm for solving Vandermonde systems. The algorithm costs $O(n^2)$ arithmetic operations. Numerical results show that the algorithm is higher in precision than the Gauss elimination and Gohberg-Kailath-Koltracht algorithm when solving Vandermonde-type systems.

Keywords: Vandermonde matrix; generalized Vandermonde matrix; linear systems; fast algorithm

Received: 26 June 2008. **Accepted:** 24 Dec 2008.
Foundation item: The Natural Science Foundation of China (10802068); the Natural Science Foundation of Shannxi Province (2006A05).